Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°4: Dérivation/Fonctions usuelles

Exercice 1.

(1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. Considérons la fonction g définie par:

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

(1) Montrer que si f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche de x_0 alors g admet une limite lorsque h tend vers 0 puis exprimer cette limite en fonction de $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.
Cette limite est appelée dérivée symétrique de f en x_0.

(2) Etudier la réciproque de (1) en considérant la fonction

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Exercice 3. Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$(a)\ x \mapsto x \ln(|x+1|)$, $(b)\ x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, $(c)\ x \mapsto (\cosh x)^x$, $(d)\ x \mapsto \sqrt{1 + \tanh x}$

Exercice 4. Résoudre les équations:

$$(1)\ \arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x, \qquad (2)\ \arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Exercice 5. Montrer l' égalités suivante:

(1) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0, 1]$

(2) (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

(b) En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

(3) Simplifier les expressions suivantes:

$$\arccos(1-2x^2), \quad \sin\left(2\arctan(x)\right), \quad \sinh(2\operatorname{arg\,sinh} x)$$

Exercice 6. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
(2) Déterminer les valeurs possible de c.

Exercice 8. Soit l'application $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers son image que l'on précisera.
(2) Sans calculer f^{-1}, déterminer son domaine de continuité et de dérivabilité.
(3) Déterminer f^{-1} et calculer sa dérivée.

Exercice 9. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

(1) Donner l'expression de f en fonction de la fonction ln.
(2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f
(3) Calculer la dérivée de f. En déduire l' expression de f obtenu en (1)